Session 2002

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option A : Productique Mécanique

Option F : Microtechniques

Génie Énergétique

Génie Civil

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures | **Coefficient : 4**

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis assurez vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

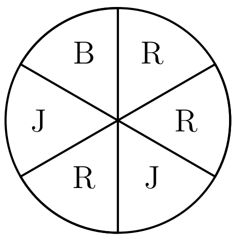
Ce sujet nécessite deux feuilles de papier millimétré.

Exercice 1 *(4 points)*

Partie A

Une roue de loterie comporte 3 secteurs, portant respectivement les numéros 1, 2 et 3. Quand on fait tourner la roue, un repère indique le numéro sortant. La probabilité de sortie du numéro 2 est double de la probabilité de sortie du numéro 1, et la probabilité de sortie du numéro 3 est triple de celle du numéro 1. Calculer les probabilités de sortie respectives des 3 numéros.

Partie B



La roue est maintenant divisée en 6 secteurs égaux ayant chacun la même probabilité de s'arrêter devant le repère.

2 secteurs sont jaunes (marqués J sur la figure)
3 secteurs sont rouges (marqués R sur la figure)
1 secteur est bleu (marqué B sur la figure).

La règle du jeu est la suivante : pour participer au jeu, le joueur doit miser une certaine somme et si le jaune sort, il gagne 20 € si le bleu sort, il gagne 30 €, si le rouge sort, il ne gagne rien.

1) Dans cette question, on suppose que la mise est de 10 €. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque arrêt de la roue associe le gain effectif (positif ou négatif) du joueur. (Par exemple, si le bleu sort, le gain effectif pour le joueur est de 20 €.)

a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculer son espérance mathématique.

2) L'organisateur du jeu ne souhaite pas que l'espérance de gain du joueur soit positive. À quelle valeur minimale, exprimée par un nombre entier d'euros, doit-il fixer le montant de la mise ?

Exercice 2 *(5 points)*

1) Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 9z - 10$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

b) Calculer $P(2)$.

c) Déterminer les réels a, b et c tels que $P(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c)$.

d) Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 2\,;\ z_B = 1 + 2\text{i}\,;\ z_C = 1 - 2\text{i} \text{ et } z_D = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}.$$

a) Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe (sur papier millimétré).

b) Calculer les modules des nombres complexes $z_A - z_D$, $z_B - z_D$ et $z_B - z_A$.
En déduire la nature du triangle ABD.

Problème *(11 points)*

Partie A : Etude du signe de $x^3 - 1 + 2\ln(x)$

Soit g la fonction définie sur $]0\ ,\ +\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
($\ln x$ désigne le logarithme népérien de x)

1) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction g. (Les limites ne sont pas demandées).

3) Calculer $g(1)$.

4) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ,\ \infty[$.

Partie B : Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire

On considère la fonction f définie sur $]0\ ,\ +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$.
On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités 3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1) a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$. Y a-t-il une autre asymptote à $(\mathscr{C})$? Si oui, donner son équation.

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

d) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

e) Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe $(\mathscr{C})$.
Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).

f) Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

2) **a)** Montrer que la fonction H définie par $H(x) = -\dfrac{1}{x}(1 + \ln x)$ est une primitive de la fonction h définie sur $]0\ ,\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

b) Soit Δ le domaine plan limité par (D), $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{\mathrm{e}}$. Hachurer Δ ; calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de Δ ; en donner une valeur approchée au mm^2 près.